

COURS DE MATHÉMATIQUES

Suites : récurrence et limites

Classe de Terminale — Spécialité Mathématiques

Pr. Elakili

Support de cours

Site web

missionmaths360.com

Au programme de ce chapitre : 1. Le raisonnement par récurrence • 2. Limite d'une suite • 3. Opérations sur les limites • 4. Limites et comparaison • 5. Suites géométriques et suites monotones.

1 Le raisonnement par récurrence

THÉORÈME — Principe de récurrence

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n . Si :

- (1) $P(0)$ est vraie ;
 - (2) pour tout entier naturel n , l'implication « $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie » est établie ;
- alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

THÉORÈME — Récurrence à partir d'un rang n_0

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété définie pour tout entier $n \geq n_0$. Si :

- (1) $P(n_0)$ est vraie ;
 - (2) pour tout entier $n \geq n_0$, l'implication « $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie » est établie ;
- alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

MÉTHODE — Rédiger une récurrence en trois étapes

- **Initialisation.** On vérifie que la propriété $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité.** On fixe un entier $n \geq n_0$, on suppose $P(n)$ vraie (*hypothèse de récurrence*), puis on démontre que $P(n+1)$ est alors vraie.
- **Conclusion.** D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque. Les deux étapes sont *indispensables* : l'hérédité seule ne prouve rien sans une initialisation vérifiée, et une initialisation vérifiée ne garantit rien sans l'hérédité.

EXEMPLES

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , l'entier $4^n - 1$ est divisible par 3.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 4$, on a $2^n \geq n^2$.

PROPRIÉTÉ — Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier naturel n :

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

2 Limite d'une suite

DÉFINITION — Suite divergeant vers l'infini

Soit (u_n) une suite.

- On dit que (u_n) **tend vers** $+\infty$ lorsque, pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que (u_n) **tend vers** $-\infty$ lorsque, pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $] -\infty; -A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Dans ces deux cas, on dit que la suite (u_n) **diverge**.

EXEMPLE

À l'aide de la définition, montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 3$ diverge vers $+\infty$.

DÉFINITION — Suite convergeant vers un réel

Soit ℓ un réel. On dit que (u_n) **tend vers** ℓ , ou **converge vers** ℓ , lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Remarque. Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient un intervalle centré en ℓ de la forme $]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$. On peut donc reformuler : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

THÉORÈME — Unicité de la limite

Si une suite admet une limite, alors cette limite est unique.

Remarque. Une suite qui ne converge pas est dite *divergente* : elle peut tendre vers $+\infty$, tendre vers $-\infty$, ou bien n'avoir aucune limite. Par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1 : elle n'admet pas de limite.

EXEMPLE

À l'aide de la définition, montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 - \frac{1}{n}$ converge vers 3 .

3 Opérations sur les limites

PROPRIÉTÉ — Limites des suites de référence

- Les suites $(\sqrt{n})$, (n) et (n^k) avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers $+\infty$.
- Les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers 0.

PROPRIÉTÉ — Limite d'une somme et d'un produit

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, ℓ et ℓ' deux réels.

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n + v_n)$	$\lim(u_n \times v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$ F.I. si $\ell = 0$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$ F.I. si $\ell = 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$

PROPRIÉTÉ — Limite d'un quotient

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, ℓ et ℓ' deux réels.

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\ell \neq 0$	0^+	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$
	0^-	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$ si $\ell' > 0$ ou $\ell' = 0^+$ $-\infty$ si $\ell' < 0$ ou $\ell' = 0^-$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$ si $\ell' > 0$ ou $\ell' = 0^+$ $+\infty$ si $\ell' < 0$ ou $\ell' = 0^-$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.
0	0	F.I.

Remarques.

- **F.I.** désigne une *forme indéterminée* : aucune règle ne permet de conclure directement ; il faut alors transformer l'écriture de la suite. Par exemple, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n)$ conduit à la forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ».
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^+$ (resp. 0^-) signifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ avec $v_n > 0$ (resp. $v_n < 0$) à partir d'un certain rang.

EXEMPLES

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3n^2 - \frac{2}{n} + 1 \right) ;$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{n} + 2}.$

4 Limites et comparaison

THÉORÈME — Théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

EXEMPLE

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + \cos(n)$.

THÉORÈME — Théorème des gendarmes (ou d'encadrement)

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites, et ℓ un réel. Si :

- $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$;

alors la suite (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

EXEMPLE

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 + \frac{\sin(n)}{n}$.

PROPRIÉTÉ — Passage à la limite dans une inégalité

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Remarque. Les inégalités *strictes* ne se conservent pas nécessairement par passage à la limite : de $u_n < v_n$ on ne peut déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Ainsi $0 < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, et pourtant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

EXEMPLE

Soit (u_n) une suite convergente telle que $u_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on affirmer sur $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$?

5 Suites géométriques et suites monotones

PROPRIÉTÉ — Limite d'une suite géométrique

Soit q un réel.

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

EXEMPLES

1. Déterminer la limite de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $q = 2$.
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

DÉFINITION — Suite majorée, minorée, bornée

Soit (u_n) une suite définie à partir d'un rang k .

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq k$.
- (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \geq k$.
- (u_n) est **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

EXEMPLE

Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n}{n+1}$ est bornée.

THÉORÈME — Convergence des suites monotones

- (1) Toute suite croissante et majorée converge.
- (2) Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- (3) Toute suite décroissante et minorée converge.
- (4) Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Remarque. Les réciproques de ces propriétés sont fausses. Par exemple, la suite définie par $u_n = n^2 + (-1)^n$ diverge vers $+\infty$ sans être croissante.

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. On admet que (u_n) est croissante et majorée par 2. En déduire que (u_n) converge.