

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Fiche d'exercices • **Chapitre 01** • Classe de **TMATHS5**

Lycée Aljabr Oasis — Casablanca

Pr. Elakili

Mathématiques

12 exercices, difficulté croissante

Difficulté : ★☆☆☆ abordable • ★★☆☆ classique • ★★★☆ solide • ★★★★ exigeant

EXERCICE 1 • Somme des premiers entiers

★☆☆☆

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

EXERCICE 2 • Somme des entiers impairs

★☆☆☆

Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

EXERCICE 3 • Somme des carrés

★★☆☆

Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

EXERCICE 4 • Somme des cubes

★★☆☆

Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

En déduire que $\sum_{k=1}^n k^3$ est le carré d'un entier.

EXERCICE 5 • Divisibilité par 3

★★☆☆

Démontrer que, pour tout entier naturel n , le nombre $4^n - 1$ est divisible par 3.

EXERCICE 6 • Une inégalité exponentielle

★★☆☆

Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^n \geq n + 1$.

EXERCICE 7 • Divisibilité par 7

★★★★☆

Démontrer que, pour tout entier naturel n , le nombre $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

EXERCICE 8 • Inégalité de Bernoulli

★★★★☆

Soit a un réel tel que $a \geq -1$. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

EXERCICE 9 • Somme et factorielles

★★★★☆

Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$. (On rappelle : $(k+1)! = (k+1) \times k!$.)

EXERCICE 10 • Une somme télescopique

★★★★☆

Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

EXERCICE 11 • Une inégalité plus fine

★★★★

On souhaite comparer 2^n et n^2 .

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 3$, on a $n^2 \geq 2n + 1$.
2. En déduire, par récurrence, que pour tout entier $n \geq 4$: $2^n \geq n^2$.

EXERCICE 12 • Étude d'une suite récurrente

★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $1 \leq u_n \leq 2$.
2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
3. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (u_n) ?

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE — CORRIGÉ

Chapitre 01 • Classe de **TMATHS5** • Lycée Aljabr Oasis, Casablanca

Pr. Elakili

missionmaths360.com

EXERCICE 1 • Somme des premiers entiers

Initialisation. Pour $n = 1$: $\sum_{k=1}^1 k = 1$ et $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Vrai au rang 1.

Hérédité. Supposons $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour un entier $n \geq 1$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

EXERCICE 2 • Somme des entiers impairs

Initialisation. Pour $n = 1$: la somme vaut 1 et $1^2 = 1$. Vrai au rang 1.

Hérédité. Supposons $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = n^2 + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$.

EXERCICE 3 • Somme des carrés

Initialisation. Pour $n = 1$: la somme vaut 1 et $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. Vrai au rang 1.

Hérédité. Supposons $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

car $n(2n+1) + 6(n+1) = 2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$.

Conclusion. La formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

EXERCICE 4 • Somme des cubes

Initialisation. Pour $n = 1$: la somme vaut 1 et $\left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2 = 1$. Vrai au rang 1.

Hérédité. Supposons $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \cdot \frac{n^2 + 4(n+1)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

Conclusion. La formule est vraie pour tout $n \geq 1$. De plus $\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^n k$ est un entier, donc la somme des cubes est bien le carré d'un entier.

EXERCICE 5 • Divisibilité par 3

Initialisation. Pour $n = 0$: $4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$, divisible par 3.

Hérédité. Supposons $4^n - 1 = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$4^{n+1} - 1 = 4 \cdot 4^n - 1 = 4(3k + 1) - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1).$$

Donc $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $4^n - 1$.

EXERCICE 6 • Une inégalité exponentielle

Initialisation. Pour $n = 0$: $2^0 = 1 \geq 0 + 1 = 1$. Vrai au rang 0.

Hérédité. Supposons $2^n \geq n + 1$ pour un entier $n \geq 0$. Alors

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n + 1) = 2n + 2 \geq n + 2 = (n + 1) + 1,$$

la dernière inégalité venant de $2n + 2 - (n + 2) = n \geq 0$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n + 1$.

EXERCICE 7 • Divisibilité par 7

Initialisation. Pour $n = 0$: $3^1 + 2^2 = 3 + 4 = 7$, divisible par 7.

Hérédité. Supposons $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Au rang $n + 1$:

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2} = 2(3^{2n+1} + 2^{n+2}) + 7 \cdot 3^{2n+1} = 2 \cdot 7k + 7 \cdot 3^{2n+1} = 7(2k + 3^{2n+1}).$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

EXERCICE 8 • Inégalité de Bernoulli

Soit $a \geq -1$ fixé.

Initialisation. Pour $n = 0$: $(1 + a)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot a = 1$. Vrai au rang 0.

Hérédité. Supposons $(1 + a)^n \geq 1 + na$. Comme $1 + a \geq 0$, on peut multiplier par $1 + a$:

$$(1 + a)^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a,$$

car $na^2 \geq 0$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

EXERCICE 9 • Somme et factorielles

Initialisation. Pour $n = 1$: $1 \cdot 1! = 1$ et $(1 + 1)! - 1 = 2 - 1 = 1$. Vrai au rang 1.

Hérédité. Supposons $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n + 1)! - 1$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = (n + 1)! - 1 + (n + 1)(n + 1)! = (n + 1)!(1 + (n + 1)) - 1 = (n + 2)! - 1.$$

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n + 1)! - 1$.

EXERCICE 10 • Une somme télescopique

Initialisation. Pour $n = 1$: $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Vrai au rang 1.

Hérédité. Supposons $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

EXERCICE 11 • Une inégalité plus fine

1. Pour $n \geq 3$: $n^2 = n \cdot n \geq 3n = 2n + n \geq 2n + 1$ (car $n \geq 1$). Donc $n^2 \geq 2n + 1$.

2. **Initialisation.** Pour $n = 4$: $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$, donc $2^4 \geq 4^2$.

Hérédité. Soit $n \geq 4$ tel que $2^n \geq n^2$. Alors $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2$. Or, d'après 1. (et $n \geq 4 \geq 3$),

$$2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 \geq 0, \quad \text{donc} \quad 2n^2 \geq (n+1)^2.$$

Ainsi $2^{n+1} \geq (n+1)^2$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

EXERCICE 12 • Étude d'une suite récurrente

1. **Encadrement** $1 \leq u_n \leq 2$.

Initialisation. $u_0 = 1$, donc $1 \leq u_0 \leq 2$.

Hérédité. Supposons $1 \leq u_n \leq 2$. Alors $3 \leq 2 + u_n \leq 4$, et comme la fonction racine est croissante, $\sqrt{3} \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2$. Puisque $\sqrt{3} \geq 1$, on obtient $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.

2. **Croissance.**

Initialisation. $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{3} \approx 1,73$, donc $u_0 \leq u_1$.

Hérédité. Supposons $u_n \leq u_{n+1}$. Alors $2 + u_n \leq 2 + u_{n+1}$, et par croissance de la racine, $\sqrt{2 + u_n} \leq \sqrt{2 + u_{n+1}}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

Conclusion. La suite (u_n) est croissante.

3. **Convergence.** (u_n) est croissante et majorée par 2 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ . En passant à la limite dans $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, on a $\ell = \sqrt{2 + \ell}$ avec $\ell \geq 0$, d'où $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, soit $(\ell - 2)(\ell + 1) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, $\boxed{\ell = 2}$.

Fin du corrigé — missionmaths360.com