

Raisonnement par récurrence et suites

Fiche d'entraînement n°2 • Chapitre 01 • Classe de TMATHS5 • Lycée Aljabr Oasis, Casablanca

Préparation du devoir surveillé du vendredi 25 septembre 2026

Pr. Elakili • Site web : missionmaths360.com • 12 exercices, difficulté croissante

Difficulté : ★☆☆☆ abordable • ★★☆☆ classique • ★★★☆☆ solide • ★★★★★ exigeant

EXERCICE 1 • Une suite arithmético-géométrique

★☆☆☆

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n + 1$.

EXERCICE 2 • Somme de produits consécutifs

★☆☆☆

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

EXERCICE 3 • Somme géométrique

★★☆☆

Soit q un réel différent de 1.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. En déduire la valeur de $S = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{10}$.

EXERCICE 4 • Conjecturer puis démontrer

★★☆☆

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

1. Calculer u_1 , u_2 , u_3 et conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

EXERCICE 5 • Divisibilité par 7

★★☆☆

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $9^n - 2^n$ est divisible par 7.

EXERCICE 6 • Divisibilité par 9

★★☆☆

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $4^n + 6n - 1$ est divisible par 9.

EXERCICE 7 • Suite et limite

★★☆☆

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2}$.

1. Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 sous forme de fractions.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 - \frac{2}{2^n}$.
3. En déduire que (u_n) est majorée par 2, puis déterminer sa limite.

EXERCICE 8 • Majoration d'une somme



Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Indication : on pourra vérifier que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.

EXERCICE 9 • Suite définie par une fonction polynôme



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x-x^2}{2}$, et (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que si $x \in [0; 1]$, alors $f(x) \in [0; 1]$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
4. En déduire que (u_n) converge. Résoudre l'équation $f(x) = x$ et déterminer la limite de (u_n) .

EXERCICE 10 • Suite définie par une fonction rationnelle



Soit f la fonction définie sur $] -2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$, et (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $] -2; +\infty[$.
2. Résoudre dans $] -2; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
4. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite ℓ .
5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$. Montrer que (v_n) est arithmétique, puis exprimer u_n en fonction de n . Retrouver la valeur de ℓ .

EXERCICE 11 • Extrait de bac — Protocole médical



Source : Bac Métropole, session du 11 mai 2022, sujet 1, Exercice 1, Partie B (questions 1 à 3).

Un protocole consiste à injecter initialement à un patient une dose de 2 mg d'un médicament, puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg. On estime que, lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament présente dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection. On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où u_n désigne la quantité de médicament (en mg) présente dans le sang immédiatement après l'injection de la n -ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer u_1 .
2. Justifier que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n \leq u_{n+1} < 6$.
b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
c. Déterminer la valeur de ℓ . Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 12 • Extrait de bac — Suite homographique



Source : Bac Nouvelle-Calédonie, session du 29 août 2023, jour 2, Exercice 3 (questions 1, 3, 4 et 5 ; dernière question complétée).

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}$. On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n .

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. Soit f la fonction définie sur $] -3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-x-4}{x+3}$. Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
Démontrer que f est strictement croissante sur $] -3; +\infty[$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $-2 < u_{n+1} \leq u_n$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente, puis déterminer sa limite.

Raisonnement par récurrence et suites — Corrigé

Fiche d'entraînement n°2 • Chapitre 01 • Classe de TMATHS5 • Lycée Aljabr Oasis, Casablanca

Pr. Elakili • Site web : missionmaths360.com

EXERCICE 1 • Une suite arithmético-géométrique

1. $u_1 = 2 \times 2 - 1 = 3$, $u_2 = 2 \times 3 - 1 = 5$, $u_3 = 2 \times 5 - 1 = 9$.

2. **Initialisation.** $2^0 + 1 = 2 = u_0$. Vrai au rang 0.

Hérédité. Supposons $u_n = 2^n + 1$ pour un entier $n \geq 0$. Alors $u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2(2^n + 1) - 1 = 2^{n+1} + 2 - 1 = 2^{n+1} + 1$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rightsquigarrow u_n = 2^n + 1$.

EXERCICE 2 • Somme de produits consécutifs

Initialisation. Pour $n = 1$: $1 \times 2 = 2$ et $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$. Vrai au rang 1.

Hérédité. Supposons $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2) \left(\frac{n}{3} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $\rightsquigarrow \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

EXERCICE 3 • Somme géométrique

1. **Initialisation.** Pour $n = 0$: $q^0 = 1$ et $\frac{1-q}{1-q} = 1$. Vrai au rang 0.

Hérédité. Supposons $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rightsquigarrow \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2. Avec $q = 3$ et $n = 10$: $\rightsquigarrow S = \frac{1-3^{11}}{1-3} = \frac{3^{11}-1}{2} = 88\,573$.

EXERCICE 4 • Conjecturer puis démontrer

1. $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$, $u_3 = \frac{1/3}{4/3} = \frac{1}{4}$. $\rightsquigarrow$ **Conjecture** : $u_n = \frac{1}{n+1}$.

2. **Initialisation.** $u_0 = 1 = \frac{1}{0+1}$. Vrai au rang 0.

Hérédité. Supposons $u_n = \frac{1}{n+1}$. Alors $u_{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{n+2}$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rightsquigarrow u_n = \frac{1}{n+1}$.

EXERCICE 5 • Divisibilité par 7

Initialisation. Pour $n = 0$: $9^0 - 2^0 = 0 = 7 \times 0$. Vrai au rang 0.

Hérédité. Supposons $9^n - 2^n = 7k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$9^{n+1} - 2^{n+1} = 9 \cdot 9^n - 2 \cdot 2^n = 9(7k + 2^n) - 2 \cdot 2^n = 63k + 9 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n = 63k + 7 \cdot 2^n = 7(9k + 2^n).$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rightsquigarrow 7$ divise $9^n - 2^n$.

EXERCICE 6 • Divisibilité par 9

Initialisation. Pour $n = 0 : 4^0 + 0 - 1 = 0 = 9 \times 0$. Vrai au rang 0.

Hérédité. Supposons $4^n + 6n - 1 = 9k$ avec $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $4^n = 9k - 6n + 1$. Alors

$$4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 4 \cdot 4^n + 6n + 5 = 4(9k - 6n + 1) + 6n + 5 = 36k - 18n + 9 = 9(4k - 2n + 1).$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rightsquigarrow 9$ divise $4^n + 6n - 1$.

EXERCICE 7 • Suite et limite

1. $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{3}{2}$, $u_3 = \frac{7}{4}$, $u_4 = \frac{15}{8}$.

2. **Initialisation.** $2 - \frac{2}{2^0} = 0 = u_0$. Vrai au rang 0.

Hérédité. Supposons $u_n = 2 - \frac{2}{2^n}$. Alors $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2} = \frac{4 - \frac{2}{2^n}}{2} = 2 - \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{2}{2^{n+1}}$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rightsquigarrow u_n = 2 - \frac{2}{2^n}$.

3. Comme $\frac{2}{2^n} > 0$, on a $u_n < 2$ pour tout $n : \rightsquigarrow (u_n)$ est majorée par 2. De plus $\frac{2}{2^n} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\rightsquigarrow \lim u_n = 2$.

EXERCICE 8 • Majoration d'une somme

Initialisation. Pour $n = 1 : \frac{1}{1^2} = 1$ et $2 - \frac{1}{1} = 1$. Vrai au rang 1 (avec égalité).

Hérédité. Supposons $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Or $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (car $n+1 \geq n$), donc $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $\rightsquigarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$. (En particulier, cette somme est majorée par 2.)

EXERCICE 9 • Suite définie par une fonction polynôme

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{3-2x}{2}$, qui s'annule en $x = \frac{3}{2} : f'(x) > 0$ pour $x < \frac{3}{2}$ et $f'(x) < 0$ pour $x > \frac{3}{2}$.
De plus $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9/2-9/4}{2} = \frac{9}{8}$.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$\frac{9}{8}$	$-\infty$

2. Sur $[0; 1] \subset]-\infty; \frac{3}{2}]$, f est croissante, donc si $0 \leq x \leq 1$ alors $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$, soit $0 \leq f(x) \leq 1$ (car $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$). $\rightsquigarrow$ Si $x \in [0; 1]$, alors $f(x) \in [0; 1]$.

3. **Initialisation.** $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3/2-1/4}{2} = \frac{5}{8}$, donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$.

Hérédité. Supposons $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. Comme f est croissante sur $[0; 1] : f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$, soit $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rightsquigarrow 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

4. (u_n) est croissante et majorée par 1 : $\rightsquigarrow (u_n)$ converge vers un réel $\ell \in [0; 1]$.

$f(x) = x \iff 3x - x^2 = 2x \iff x - x^2 = 0 \iff x(1-x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$.

Par continuité de f , $\ell = f(\ell)$, donc $\ell \in \{0; 1\}$. Or (u_n) est croissante, donc $\ell \geq u_0 = \frac{1}{2} : \rightsquigarrow \ell = 1$.

EXERCICE 10 • Suite définie par une fonction rationnelle

1. $f'(x) = \frac{4(x+2) - (4x-1)}{(x+2)^2} = \frac{9}{(x+2)^2} > 0$ sur $] -2; +\infty[: f$ est strictement croissante. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$ (numérateur $\rightarrow -9$, dénominateur $\rightarrow 0^+$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$.

x	-2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
f	$-\infty$	4

2. $f(x) = x \iff 4x - 1 = x(x+2) \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff \rightsquigarrow x = 1$.
3. **Initialisation.** $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) = \frac{7}{4}$, donc $1 \leq u_1 \leq u_0$.
Hérédité. Supposons $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$. Par croissance de f sur $] -2; +\infty[: f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$, et $f(1) = 1$, d'où $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rightsquigarrow 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
4. (u_n) est décroissante et minorée par 1 : $\rightsquigarrow$ **elle converge** vers $\ell \geq 1$. Par continuité de f , $\ell = f(\ell)$, donc d'après 2., $\rightsquigarrow \ell = 1$.
5. Pour tout n , $u_n > 1$ (sinon la suite serait constante égale à 1, or $u_0 = 2$), donc v_n est bien défini.

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} = \frac{u_n + 2}{4u_n - 1 - u_n - 2} = \frac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} = \frac{(u_n - 1) + 3}{3(u_n - 1)} = \frac{1}{3} + v_n.$$

$\rightsquigarrow (v_n)$ est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$, de premier terme $v_0 = 1$. Donc $v_n = 1 + \frac{n}{3} = \frac{n+3}{3}$, puis $u_n - 1 = \frac{3}{n+3} : \rightsquigarrow u_n = 1 + \frac{3}{n+3}$. Comme $\frac{3}{n+3} \rightarrow 0$, on retrouve $\rightsquigarrow \ell = 1$.

EXERCICE 11 • Extrait de bac — Protocole médical (Métropole, 11 mai 2022)

1. Après une heure, il reste $2 \times 0,7 = 1,4$ mg, puis on injecte 1,8 mg : $\rightsquigarrow u_1 = 1,4 + 1,8 = 3,2$.
2. Entre deux injections, la quantité u_n diminue de 30 % : il reste $0,7u_n$. On ajoute ensuite 1,8 mg, d'où $\rightsquigarrow u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
3. **a. Initialisation.** $u_0 = 2 \leq u_1 = 3,2 < 6$. Vrai au rang 0.
Hérédité. Supposons $u_n \leq u_{n+1} < 6$. En multipliant par $0,7 > 0 : 0,7u_n \leq 0,7u_{n+1} < 4,2$, puis en ajoutant 1,8 : $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rightsquigarrow u_n \leq u_{n+1} < 6$.
b. (u_n) est croissante et majorée par 6 : d'après le théorème de convergence monotone, $\rightsquigarrow (u_n)$ **converge**.
c. Par passage à la limite dans $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8 : \ell = 0,7\ell + 1,8$, soit $0,3\ell = 1,8$, d'où $\rightsquigarrow \ell = 6$. À long terme, la quantité de médicament dans le sang se stabilise autour de 6 mg (sans jamais l'atteindre).

EXERCICE 12 • Extrait de bac — Suite homographique (Nouvelle-Calédonie, 29 août 2023)

1. $u_1 = \frac{-0-4}{0+3} = -\frac{4}{3}$; $u_2 = \frac{\frac{4}{3}-4}{-\frac{4}{3}+3} = \frac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{8}{5}$.
2. f est dérivable sur $] -3; +\infty[$ et, avec $u(x) = -x - 4$, $v(x) = x + 3$:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-(x+3) - (-x-4)}{(x+3)^2} = \frac{-x-3+x+4}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)^2} > 0.$$

Donc $\rightsquigarrow f$ est strictement croissante sur $] -3; +\infty[$.

3. **Initialisation.** $u_1 = -\frac{4}{3}$ et $u_0 = 0$: on a bien $-2 < -\frac{4}{3} \leq 0$. Vrai au rang 0.
Hérédité. Supposons $-2 < u_{n+1} \leq u_n$. Ces trois réels sont dans $] -3; +\infty[$ où f est strictement croissante, donc $f(-2) < f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$. Or $f(-2) = \frac{2-4}{1} = -2$, d'où $-2 < u_{n+2} \leq u_{n+1}$.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rightsquigarrow -2 < u_{n+1} \leq u_n$.
4. (u_n) est décroissante et minorée par -2 : $\rightsquigarrow (u_n)$ est convergente vers $\ell \geq -2$, donc $\ell \in] -3; +\infty[$ où f est continue. Ainsi $\ell = f(\ell) : \ell(\ell+3) = -\ell - 4 \iff \ell^2 + 4\ell + 4 = 0 \iff (\ell+2)^2 = 0$. Donc $\rightsquigarrow \ell = -2$.