

# Chapitre : Continuité

## 1. Définition et propriétés

### Définition — Continuité

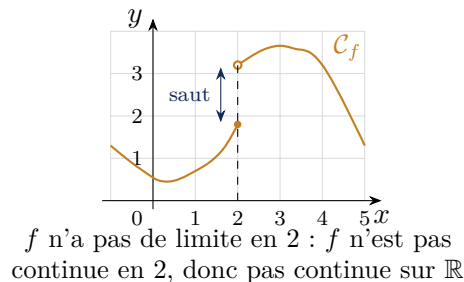
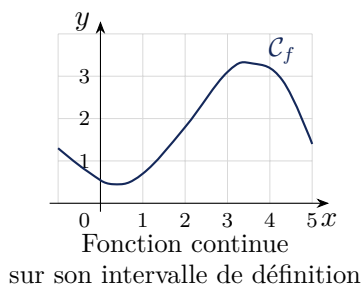
Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  contenant le réel  $a$ . On dit que  $f$  est **continue en  $a$**  si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

La fonction  $f$  est **continue sur  $I$**  si, et seulement si,  $f$  est continue en tout point de  $I$ .

### ➤ Remarques

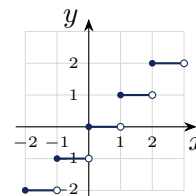
- Graphiquement, la continuité d'une fonction sur un intervalle  $I$  se traduit par une courbe « en un seul morceau » : elle n'a pas de « saut » en certaines valeurs.
- On définit la continuité sur un intervalle fermé en prenant la limite à droite de la borne inférieure et la limite à gauche de la borne supérieure.
- Pour une fonction qui change d'expression en  $a$ , on calcule la limite à gauche et la limite à droite de  $a$  et on les compare à  $f(a)$ .



**Exemple.** La fonction **partie entière**, notée  $E$ , associe à tout réel  $x$  le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$  : si  $n \leq x < n+1$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ , alors  $E(x) = n$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow 2^-} E(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} E(x) = 2$  : la fonction  $E$  n'a pas de limite en 2, elle n'est donc pas continue en 2.

Plus généralement,  $E$  est continue sur chaque intervalle  $]n; n+1[$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) et n'est continue en aucun entier.



### Propriétés — Continuité des fonctions usuelles

- Les fonctions puissances  $x \mapsto x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sont continues sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction valeur absolue  $x \mapsto |x|$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $] 0; +\infty[$ .
- La fonction exponentielle  $x \mapsto e^x$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction racine carrée  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .
- Les fonctions  $x \mapsto \sin x$  et  $x \mapsto \cos x$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .
- D'une façon générale, toutes les fonctions construites par somme, produit, quotient ou composition à partir des fonctions ci-dessus sont continues sur leur ensemble de définition.

**➤ Remarque**

Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

**Exemple.** La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin(\cos(x^2 + 1))$  est continue sur  $\mathbb{R}$  par composition de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 1**

Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur  $\mathbb{R}$  :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe à la calculatrice. Que peut-on conjecturer sur l'ensemble sur lequel la fonction est continue ?
2. Démontrer cette conjecture en étudiant séparément le point de raccordement ( $x = 1$  pour  $f$ ,  $x = 0$  pour  $g$ ) et les autres réels.

**2. Continuité et dérivabilité****Théorème — Continuité et dérivabilité**

Si une fonction  $f$  est dérivable en un point  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

Si une fonction  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .

**Démonstration.** Montrons que la dérivabilité en  $a$  entraîne la continuité en  $a$ . Pour  $x \neq a$ , posons  $t(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  le taux d'accroissement de  $f$  en  $a$ . Alors

$$(x - a)t(x) = f(x) - f(a) \quad \text{donc} \quad f(x) = (x - a)t(x) + f(a).$$

La fonction  $f$  est dérivable en  $a$  :  $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = f'(a)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$ , donc par produit  $\lim_{x \rightarrow a} (x - a)t(x) = 0$  et par somme  $\lim_{x \rightarrow a} [(x - a)t(x) + f(a)] = f(a)$ . On a alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  : la fonction  $f$  est continue en  $a$ .  $\square$

**➤ Remarque**

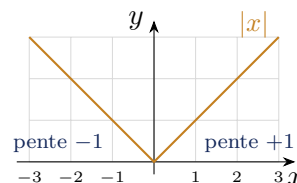
La réciproque de ce théorème est **fausse** : une fonction peut être continue en  $a$  sans être dérivable en  $a$ . C'est le cas de la fonction valeur absolue en 0.

- Taux d'accroissement en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Les deux limites sont différentes : la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

- Or  $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$  : la fonction valeur absolue est continue en 0.



Une fonction continue mais non dérivable en  $a$  est caractérisée par une courbe qui admet un **point anguleux** en  $a$ .

**Exercice 2**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ .

1. Montrer que  $f$  est continue en 1.
2. Visualiser la fonction  $f$  sur une calculatrice et expliquer la non-dérivabilité de  $f$  en 1.

### 3. Continuité et suite

#### Théorème — Point fixe

Soit une suite  $(u_n)$  définie par un premier terme et la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ , convergente vers  $\ell$ . Si la fonction associée  $f$  est continue en  $\ell$ , alors la limite  $\ell$  de la suite est solution de l'équation  $f(x) = x$ .

#### Démonstration.

- La suite  $(u_n)$  est convergente vers  $\ell$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .
- De plus, la fonction  $f$  est continue en  $\ell$ , donc  $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$ .
- Par composition, on en déduit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ , c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = f(\ell)$ .
- Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ; on en déduit, par unicité de la limite, que  $f(\ell) = \ell$ . □

#### ➤ Remarques

- La condition de continuité de  $f$  en  $\ell$  est indispensable. Comme  $\ell$  n'est pas connue « a priori », on utilisera en pratique l'ensemble sur lequel la fonction  $f$  est continue.
- Si l'équation  $f(x) = x$  admet plusieurs solutions, on choisira celle qui correspond aux caractéristiques de la suite (signe, sens de variation, minorant, majorant...).

#### Exercice 3



1. Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0,1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$ .  
On admet que la suite  $(u_n)$  est croissante et convergente vers  $\ell$ . Déterminer  $\ell$ .
2. Soit la suite  $(v_n)$  définie par  $v_0 = 3$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = \frac{2 + 3v_n}{4 + v_n}$ .  
On admet que la suite  $(v_n)$  est minorée par 1 et convergente vers  $\ell'$ . Déterminer  $\ell'$ .

### 4. Continuité et équation

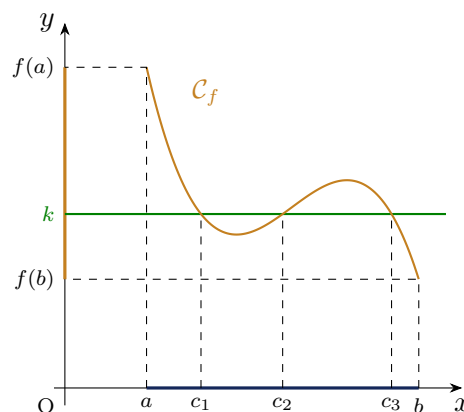
#### Théorème — Valeurs intermédiaires

Soit  $f$  une fonction **continue** sur un intervalle  $[a; b]$ .  
Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet **au moins une** solution  $c$  dans l'intervalle  $[a; b]$ .

**Démonstration.** L'idée de la démonstration est d'encadrer  $k$  dans des intervalles d'amplitude de plus en plus petite par un procédé de dichotomie, et de montrer l'existence de  $c$  par la continuité de la fonction  $f$ , par passage à la limite. □

#### ➤ Remarques

- Ce théorème s'appelle le théorème des valeurs intermédiaires car le réel  $k$  est une valeur intermédiaire entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .
- L'existence d'une solution  $c$  s'explique par l'absence de « saut » de la courbe  $\mathcal{C}_f$ . Ainsi, l'**image de l'intervalle**  $[a; b]$  par une fonction continue est un **intervalle** qui contient nécessairement  $k$ .
- L'existence de  $c$  ne signifie pas qu'il n'existe qu'une seule solution : sur le graphique ci-contre, il en existe trois, notées  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$ .

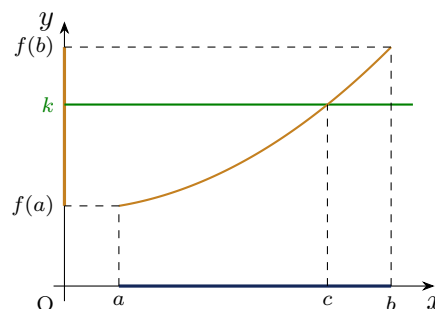


**Théorème — Bijection**

Soit  $f$  une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle  $[a; b]$ .

Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une **unique** solution  $c$  dans l'intervalle  $[a; b]$ .

**Démonstration.** L'existence d'une solution est montrée par le théorème des valeurs intermédiaires. On montre l'unicité par l'absurde : supposons que l'équation  $f(x) = k$  admette deux solutions distinctes  $c_1$  et  $c_2$ , avec  $c_1 < c_2$ . La stricte monotonie de  $f$  entraîne  $f(c_1) < f(c_2)$  si  $f$  est croissante, ou  $f(c_1) > f(c_2)$  si  $f$  est décroissante, ce qui est contradictoire avec  $f(c_1) = f(c_2) = k$ .  $\square$

**➤ Remarques**

- On généralise ce théorème à un intervalle ouvert  $I = ]a; b[$  où  $a$  et  $b$  peuvent être des réels ou  $\pm\infty$ ;  $k$  doit alors être compris entre  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ .
- Lorsque  $k = 0$ , il suffira de montrer que la fonction  $f$  change de signe sur  $I$ .
- Le terme « bijection » signifie que tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  admet un et un seul antécédent par  $f$  dans  $[a; b]$ .
- Un tableau de variations suffit pour montrer la continuité et la stricte monotonie de la fonction : les flèches « montantes » ou « descendantes » indiquent la continuité et la monotonie, qui doivent être citées comme hypothèses dans la rédaction.

**Exemple.** L'équation  $x^3 = 20$  admet une unique solution sur  $] -\infty; +\infty[$  car la fonction cube  $x \mapsto x^3$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , et 20 est compris entre  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ .

**Exercice 4**

★★★

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[-2; +\infty[$  par  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ .

- Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ ; on admettra que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet au moins une solution dans  $[-2; +\infty[$ .
  - Montrer que l'équation  $f(x) = 5$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[-2; +\infty[$ . Donner un encadrement de  $\alpha$  au dixième près.

**Exercice 5**

★★★

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$ .

- Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ ; on admettra que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[0; +\infty[$ .
  - À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.