

Cours de Mathématiques

Dérivation

Classe de Première — Spécialité Mathématiques

Pr. Elakili

Support de cours

Site web

missionmaths360.com

Au programme de ce chapitre : 1. Nombre dérivé. Tangente • 2. Fonction dérivée • 3. Opérations et dérivation • 4. Composition de fonctions et dérivation.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. a et b désignent des réels de l'intervalle I . A et B sont des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses $x_A = a$ et $x_B = b$.

1 Nombre dérivé. Tangente

a) Taux de variation d'une fonction

Définition — Taux de variation

On appelle **taux de variation** de f entre a et b le quotient :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On le note parfois $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a; b)$.

Remarque. Le taux de variation de f entre a et b correspond au coefficient directeur m de la droite (AB) sécante à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A et B, c'est-à-dire $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exemple

Déterminer le taux de variation de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ entre 4 et 7, puis interpréter ce résultat comme coefficient directeur d'une sécante à $\mathcal{C}_f$.

■ b) Nombre dérivé d'une fonction en un réel

Définition — Nombre dérivé

Soit h un réel non nul tel que $a + h$ appartienne à l'intervalle I .

On dit que f est **dérivable en** a si et seulement si le taux de variation de f entre a et $a + h$ tend vers un unique nombre réel lorsque h tend vers 0. Ce nombre réel est appelé **nombre dérivé de** f **en** a et se note $f'(a)$.

On écrit :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Remarques.

- L'expression « tend vers un nombre » signifie « se rapproche de plus en plus de ce nombre ».
- On peut dire aussi que f est dérivable en a si et seulement si le taux de variation entre a et x tend vers un unique nombre réel $f'(a)$ lorsque x tend vers a : $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Exemples

1. Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2$ en $a = 3$. Montrer que f est dérivable en 3 et déterminer $f'(3)$.
2. Considérons la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Montrer que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Remarque. La définition du nombre dérivé peut s'interpréter de la façon suivante : si on nomme M le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $x_M = a + h$, alors, lorsqu'on rapproche le point M du point A sur la courbe $\mathcal{C}_f$ jusqu'à ce qu'ils soient « presque » confondus, la « sécante ultime » (AM) a pour coefficient directeur $f'(a)$.

■ c) Tangente

Définition — Tangente

La droite passant par le point A et ayant pour coefficient directeur $f'(a)$ s'appelle la **tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A** (ou au point d'abscisse a).

Exemple

La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$ est une parabole qu'on nommera $\mathcal{P}$. On place sur cette courbe le point A d'abscisse 3. Justifier que la droite passant par A et qui a pour coefficient directeur 6 est la tangente à $\mathcal{P}$ en A .

Théorème — Équation de la tangente

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A a pour équation réduite

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Remarque. Sachant qu'au « voisinage de a » la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente en a sont presque confondues, on dit que $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ est une **approximation affine de f au voisinage de a** . On a alors, pour tout réel x très proche du réel a , $f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$.

On peut aussi écrire, si on pose $x = a + h$ avec h proche de 0, $f(a + h) \approx f'(a) \times h + f(a)$.

2 Fonction dérivée

a) Fonction dérivée sur un intervalle I

Définition — Fonction dérivée

On dit qu'une fonction est **dérivable sur l'intervalle I** si elle est dérivable en tout réel a de I . Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I . On appelle **fonction dérivée de la fonction f** , et on la note f' , la fonction qui à tout réel x de I associe le réel $f'(x)$.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) Fonctions dérivées des fonctions de référence

Théorèmes — Dérivées des fonctions de référence

- (1) Soit c un réel. La **fonction constante** définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout réel x , $f'(x) = 0$.
- (2) Soit m un réel. La **fonction « identité »** définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout réel x , $f'(x) = 1$.
- (3) La **fonction carrée** définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout réel x , $f'(x) = 2x$.
- (4) La **fonction inverse** définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et on a, pour tout réel x , $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
- (5) La **fonction racine carrée** définie sur $]0; +\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, et on a, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- (6) Pour tout entier relatif n , la fonction définie sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$ si n est négatif) par $f : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$ si n est négatif), et on a, pour tout réel x (non nul si n est négatif), $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemple

Soit la fonction $x \mapsto x^3$. Justifier qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

Remarque. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 : sa courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

3 Opérations et dérivation

a) Dérivée d'une somme de fonctions

Théorème — Dérivée d'une somme

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction « somme » $u + v : x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I . Et on a, pour tout réel x de I , $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$. On peut aussi noter $(u + v)' = u' + v'$.

Exemple

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x^3 + \frac{1}{x}$. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer g' .

b) Dérivée d'un produit de fonctions

Théorème — Dérivée d'un produit

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , alors la fonction « produit » $uv : x \mapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I . Et on a, pour tout réel x de I , $(uv)'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$. On note aussi $(uv)' = u'v + v'u$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f : x \mapsto x\sqrt{x}$. Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et déterminer f' .

Remarques.

- (1) Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et si k est une constante réelle alors la fonction $ku : x \mapsto k \times u(x)$ est dérivable sur I . Et on a, pour tout réel x de I , $(ku)'(x) = k \times u'(x)$. On note $(ku)' = k \times u'$.
- (2) Conséquence des théorèmes précédents (somme et produit) : toutes les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Et en particulier la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto mx + p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout réel x , $f'(x) = m$.
- (3) La **fonction valeur absolue** $f : x \mapsto |x|$ peut être définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
 Ainsi, on peut dire que la fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout réel x de cet intervalle $f'(x) = 1$ et f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et, pour tout réel x de cet intervalle $f'(x) = -1$. En revanche, la fonction valeur absolue f n'est pas dérivable en 0.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto 5x^3$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée à l'aide de la formule ku .

■ c) Dérivée d'un quotient de fonctions

Théorème — Dérivée de l'inverse d'une fonction

Si v est une fonction dérivable sur un intervalle I et si, pour tout x de I , $v(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{v} : x \mapsto \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I . On a, pour tout réel x de I , $\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.

On note $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Théorème — Dérivée d'un quotient

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si, pour tout réel x de I , $v(x) \neq 0$, alors la fonction « quotient » $\frac{u}{v} : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I . Et on a, pour tout réel x de I , $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v^2(x)}$.

On note $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Exemples

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 7}$. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f' .
2. Soit f la fonction définie sur $I =]-4; +\infty[$ par $f : x \mapsto \frac{-7x + 5}{x + 4}$. Justifier que f est dérivable sur I et déterminer f' .

Remarque. Certaines fonctions sont de la forme $\frac{u}{v}$ mais il est souvent préférable de les écrire sous une autre forme plus simple à dériver. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \frac{2}{x}$ est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2$ et $v(x) = x$, mais comme on peut écrire $f(x) = 2 \times \frac{1}{x}$, il est plus facile de la dériver avec la formule ku avec $k = 2$ et $u(x) = \frac{1}{x}$; on obtient donc $f'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$.

4 Composition de fonctions et dérivation

Définition — Composition de fonctions

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I , $g(x)$ appartient à J . La **fonction composée de g suivie de f** est la fonction h définie sur I par $h(x) = f(g(x))$.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{g} & g(x) = X \xrightarrow{f} f(X) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \xrightarrow{h} & f(g(x)) \end{array}$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $J = [0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et g la fonction définie sur $I = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$ par $g(x) = 2x - 5$. Justifier que la fonction h , composée de f suivie de g , est définie sur I et déterminer $h(x)$.

Théorème — Dérivée d'une fonction composée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et g une fonction affine définie sur un intervalle I par $g(x) = ax + b$ où a et b sont des réels tels que, pour tout réel x de l'intervalle I , $g(x)$ appartient à l'intervalle J . Alors la fonction h composée de g suivie de f est dérivable sur I , et on a pour tout réel x de I , $h'(x) = a \times f'(ax + b)$.

Exemple

Étudier la dérivabilité de la fonction h de l'exemple précédent, définie sur $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$ par $h(x) = \sqrt{2x - 5}$, et déterminer h' .