

Cours de Mathématiques

Limites de fonctions

Classe de Terminale — Spécialité Mathématiques

Pr. Elakili

Support de cours

Site web

missionmaths360.com

Au programme de ce chapitre : 1. Limite d'une fonction en l'infini • 2. Limite d'une fonction en une valeur réelle • 3. Limite des fonctions de référence • 4. Opérations sur les limites • 5. Théorème de comparaison • 6. Limites et fonction composée.

1 Limite d'une fonction en l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[b; +\infty[$ (b pouvant ne pas être compris et pouvant être $-\infty$).

Définition — Limite infinie

On dit que $f(x)$ **tend vers** $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez grand.

C'est-à-dire que pour tout réel A il existe un réel m tel que si $x > m$ alors $f(x) > A$.

Exemple

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$. À l'aide de la définition, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Définition — Limite finie en l'infini

On dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ , quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ , contient $f(x)$ pour x assez grand.

C'est-à-dire que pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ , il existe un réel m tel que si $x > m$ alors $f(x) \in I$.

Remarque. On définit de la même manière qu'en $+\infty$ mais avec des réels x négatifs et f définie sur un intervalle de la forme $] -\infty; b]$ la limite d'une fonction f en $-\infty$.

Exemple

On souhaite étudier le comportement de $f(x) = \frac{1}{x}$ en $+\infty$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Définition — Asymptote horizontale

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ alors on dit que la droite d'équation $y = \ell$, est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f .

Remarque. La courbe représentative de la fonction inverse admet donc la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ (et en $-\infty$). C'est-à-dire que la courbe se rapproche de la droite pour x assez grand positif (et négatif).

2 Limite d'une fonction en une valeur réelle

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ est un intervalle ou une réunion d'intervalles) et a un réel appartenant à $\mathcal{D}$ ou étant une borne de $\mathcal{D}$.

Définition — Limite infinie

On dit que $f(x)$ **tend vers** $+\infty$ quand x tend vers a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x suffisamment proche de a dans $\mathcal{D}$.

C'est-à-dire que pour tout réel A il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que si $x \in \mathcal{D} \cap I$ alors $f(x) > A$.

Remarque. On définit de la même manière que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a , quand tout intervalle de la forme $] -\infty; a[$ contient $f(x)$ pour x assez proche de a .

Définition — Limite finie ou infinie à gauche ou à droite

- On dit que f admet une **limite à gauche** de a et on note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x < a$.
- On dit que f admet une **limite à droite** de a et on note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x > a$.

Remarques.

- On écrit aussi $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ pour la limite à gauche et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ pour la limite à droite.
- Les limites à droite et à gauche peuvent être différentes ou égales.
- Dans le cas où f est définie en a et où les limites à droite et à gauche sont égales alors la limite (tout court) est $f(a)$ et dans le cas où f n'est pas définie en a et où les limites à droite et gauche sont égales, la limite existe et est égale à la limite à droite et à gauche.

Exemple

On étudie la fonction inverse quand x tend vers zéro. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x}$.

Définition — Limite finie

Une fonction f admet une limite ℓ quand x tend vers un réel a lorsque $f(x)$ est aussi proche de ℓ que voulu, pourvu que x soit suffisamment proche de a .

Remarque. Pour la fonction exponentielle on a $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$.

Définition — Asymptote verticale

Si la limite à gauche ou/et à droite de $f(x)$ quand x tend vers a est infinie alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f .

Remarque. La courbe représentative de la fonction inverse admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$. C'est-à-dire que la courbe se rapproche de la droite pour x assez proche de la valeur 0 comme on le voit sur la courbe de la fonction inverse.

3 Limite des fonctions de référence

Propriétés — Limites des fonctions de référence

Fonction inverse	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$
Fonction puissance	Pour tout entier naturel n : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$		Si n est pair : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$	Si n est impair : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$
Fonction exponentielle	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$
Fonction racine carrée et racine inverse	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

4 Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions, on note α une valeur réelle a ou a^+ ou a^- ou $-\infty$ ou $+\infty$.

Propriété — Limites d'une somme et d'un produit

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \times g(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ Règle des signes
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$

Propriété — Limite d'un quotient

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$\pm\infty$	0
ℓ	0	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$ Règle des signes
0	0	indéterminée
$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 + e^x$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Remarque. Une forme indéterminée ne veut pas dire qu'il n'y a pas de limite mais que la forme de l'expression ne permet pas de déterminer sa limite de manière certaine.

5 Théorème de comparaison

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle et on note α une valeur de I ou une borne (finie ou infinie) de I .

Théorème — Théorème de comparaison

On considère deux fonctions f et g définies sur l'intervalle I .

- Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$ et si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$ et si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = -\infty$.

Exemple

On considère f la fonction définie par $f(x) = x + \sin(x)$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Corollaire — Croissance comparée

Pour tout entier naturel n , on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Théorème — Théorème d'encadrement (ou des « gendarmes »)

Soit f , g , et h trois fonctions définies sur un intervalle I telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Si, pour un réel ℓ , on a $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \ell$.

Remarque. Contrairement au théorème de comparaison, ici les limites sont finies et non infinies.

Exemple

On considère f la fonction définie par $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

6

Limites et fonction composée

Théorème — Composition de limites

Chacune des lettres a , b et c désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$ et deux fonctions f et g .

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} g(X) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

Exemple

Déterminer la limite de la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.