Chapitre 5 — Dérivation et convexité

Cours – Terminale Spécialité Mathématiques

Pr. Elakili | Site web : missionmaths360.com | Année 2026–2027

1. Composée d'une fonction u par une fonction v

Définition — Fonction composée

Soit u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J (pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$) et v une fonction définie sur J. On note $v \circ u$ (« v rond u ») la fonction définie sur I par

$$v \circ u : x \longmapsto v\big(u(x)\big). \qquad x \overset{u}{\longmapsto} u(x) \overset{v}{\longmapsto} v\big(u(x)\big)$$

Exemple. Avec $u : x \mapsto 2x - 3$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$, la fonction $v \circ u$ est définie sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ par $v \circ u(x) = \sqrt{2x-3}$, tandis que $u \circ v$ est définie sur $[0; +\infty[$ par $u \circ v(x) = 2\sqrt{x} - 3$.

Propriété — Associativité et non-commutativité

- La composition est **associative** : $w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$.
- La composition n'est **pas commutative** : en général, $v \circ u \neq u \circ v$.

2. Dérivée d'une fonction composée

Théorème — Dérivée d'une composée

Soit u et v deux fonctions dérivables (conditions de définition requises vérifiées). Alors $v \circ u$ est dérivable et

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u', \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (v \circ u)'(x) = v'\big(u(x)\big) \times u'(x).$$

Remarque. Cas particulier : si $f(x) = u(ax + b)$, alors $f'(x) = a\,u'(ax + b)$.

Exemple. $u(x) = 2x^2 - 3$, $v(x) = \sqrt{x}$: $u'(x) = 4x$, $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc

$$(v \circ u)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2-3}} \times 4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2-3}}.$$

Propriété — Monotonie d'une composée

- Si u et v ont **même monotonie**, alors $v \circ u$ est **croissante**.
- Si u et v ont des **monotonies contraires**, alors $v \circ u$ est **décroissante**.

Propriété — Dérivées usuelles

Soit u une fonction dérivable, a, b des réels et n un entier naturel non nul.

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
$au+b$	$a\,u'$	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^2	$2u'u$	$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
u^n	$n\,u'u^{n-1}$	$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	e^u	$u'\,\mathrm{e}^u$
		$\dfrac{1}{u^n}$	$-\dfrac{n\,u'}{u^{n+1}}$

3. Convexité d'une fonction

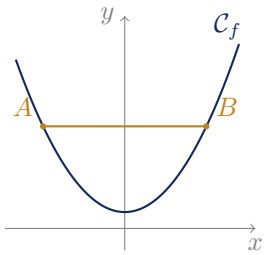
Définition — Sécante

Soit f une fonction de courbe $\mathcal{C}_f$. Si A et B sont deux points de $\mathcal{C}_f$, la droite (AB) est appelée **sécante** à $\mathcal{C}_f$.

Définition — Convexité, concavité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :

- f est **convexe** sur I si, entre deux points quelconques A et B de $\mathcal{C}_f$, la courbe est **en dessous** de la sécante $[AB]$;
- f est **concave** sur I si, entre deux points quelconques A et B de $\mathcal{C}_f$, la courbe est **au-dessus** de la sécante $[AB]$.



f convexe

Propriété — Fonctions usuelles

- Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$; la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0;+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $]0;+\infty[$ et concave sur $]-\infty;0[$.
- f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.

Propriété — Inégalités de convexité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si, pour tous réels x, y de I et pour tout $t \in [0;1]$:

$$f\big(tx+(1-t)y\big) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y).$$

- f est concave sur I si et seulement si, pour tous réels x, y de I et pour tout $t \in [0;1]$:

$$f\big(tx+(1-t)y\big) \geqslant tf(x)+(1-t)f(y).$$

Lorsque ces inégalités sont strictes pour tous $x \neq y$ de I et tout $t \in]0;1[$, on dit que f est **strictement** convexe (resp. concave) sur I.

Exemple. La fonction carrée est convexe ; avec $t=\frac{1}{2}$: $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$, donc $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$.

4. Convexité et dérivées première et seconde

Théorème — Convexité et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I ;
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Définition — Dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur I dont la dérivée f' est elle-même dérivable sur I. La **dérivée seconde** de f, notée f'', est la dérivée de f'.

Exemple. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$: $f'(x) = 3x^2 + 8x + 5$ et $f''(x) = 6x + 8$.

Théorème — Convexité et dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$;
- f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.

Démonstration. f' est croissante (resp. décroissante) si et seulement si sa dérivée f'' est positive (resp. négative) ; on conclut avec le théorème précédent. □

5. Tangente et point d'inflexion

Propriété — Position par rapport aux tangentes

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.

- Si $f'' \geqslant 0$ sur I (f convexe), alors $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de ses tangentes ;
- si $f'' \leqslant 0$ sur I (f concave), alors $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de ses tangentes.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$ et $\varphi(x) = f(x) - \big[f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\big]$. Alors $\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Comme $f'' \geqslant 0$, f' est croissante : $\varphi'(x) \leqslant 0$ pour $x \leqslant x_0$ et $\varphi'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant x_0$. Ainsi φ admet un minimum en x_0, égal à $\varphi(x_0) = 0$, d'où $\varphi \geqslant 0$ sur I : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en x_0. □

Définition — Point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur I, A un point de $\mathcal{C}_f$ et T_A la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A. On dit que A est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ si, au point A, la courbe $\mathcal{C}_f$ **traverse** sa tangente T_A.

Propriété — Caractérisation

Si f est deux fois dérivable sur I, $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse a lorsque f'' **s'annule en changeant de signe** en a (autrement dit lorsque f change de convexité en a, ou encore f' change de sens de variation en a).

Exemple. $f(x) = x^3$: $f''(x) = 6x$ change de signe en 0. L'origine $O(0;0)$ est un point d'inflexion : la courbe y traverse sa tangente, l'axe des abscisses.

6. Exercices d'application

Exercice 1 ★ Établir le schéma de composition des fonctions f et g définies par $f(x) = (x+2)^3$ et $g(x) = \sqrt{3x^2 - 5}$.

Exercice 2 ★ On considère $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Déterminer $f \circ g(6)$ puis $g \circ f(6)$.

Exercice 3 ★★ Calculer la dérivée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par a) $f(x) = (-x+1)\,\mathrm{e}^{3x}$ b) $g(x) = \sin(x^2+1)$.

Exercice 4 ★★ Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et dresser son tableau de variations.

Exercice 5 ★★ Étudier algébriquement la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 6 ★★★ En utilisant la convexité de la fonction cube sur $[0;+\infty[$, montrer que pour tous réels $a, b > 0$: $(a+b)^3 \leqslant 4(a^3+b^3)$.

Exercice 7 ★★★ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Déterminer algébriquement les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 8 ★★★ Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$. Étudier la convexité de f et déterminer les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Fin du cours — Bon travail !