Chapitre 5 — Variations et courbes représentatives

Cours – Première Spécialité Mathématiques

Pr. Elakili | Site web : missionmaths360.com | Année 2026–2027

1. Variations d'une fonction

Propriété — Variations d'une fonction et signe de sa dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si f est **croissante** sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est **décroissante** sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
- Si f est **constante** sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

Démonstration. Soit $a \in I$ et f croissante sur I. Pour tout $x \in I$, $x \neq a$: si $x < a$, alors $f(x) \leqslant f(a)$; si $x > a$, alors $f(x) \geqslant f(a)$. Dans les deux cas, $x-a$ et $f(x)-f(a)$ sont de même signe, donc le taux de variation $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est positif. On admet que, par passage à la limite, ce résultat est conservé : $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$. Les deux autres cas se traitent de la même façon. □

Propriété — Signe de la dérivée et variations d'une fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si, pour tout réel x de I, $f'(x) > 0$ (sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs où $f'(x)$ s'annule), alors f est **strictement croissante** sur I.
- Si, pour tout réel x de I, $f'(x) < 0$ (sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs où $f'(x)$ s'annule), alors f est **strictement décroissante** sur I.
- Si, pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I.

Remarque. f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$).

Exemple. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$. f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 10x - 3$. Or $10x - 3 = 0 \iff x = \dfrac{3}{10}$ et $10x - 3 > 0 \iff x > \dfrac{3}{10}$. On dresse le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f dans un même tableau, avec $f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{171}{20}$:

x	$-\infty$		$\frac{3}{10}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	$\frac{171}{20}$	↗	

f est strictement décroissante sur $\left]-\infty; \frac{3}{10}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{10}; +\infty\right[$.

2. Nombre dérivé et extremums locaux

Définition — Minimum local et maximum local

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

- f admet un **minimum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I, contenant x_0, tel que pour tout x de J, $f(x) \geqslant f(x_0)$.
- f admet un **maximum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I, contenant x_0, tel que pour tout x de J, $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Un minimum ou un maximum local est appelé **extremum local**.

Exemple. Soit f définie sur $[-8;7]$ par le tableau de variations ci-contre. Pour tout $x \in]-8;4[$, $f(x) \geqslant f(-1)$: f admet un minimum local en -1, égal à -2. Ce n'est pas le minimum de f sur $[-8;7]$ car $f(7) = -5$.

x	-8		-1		4		7
Variations de f	10	↘	-2	↗	6	↘	-5

Propriété — Dérivée et extremum local

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et $x_0 \in I$.
Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Exemple. Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, on sait que f admet un extremum en $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$; et en effet $f'(\alpha) = 2a \times \left(-\dfrac{b}{2a}\right) + b = 0$.

Propriété — Caractérisation d'un extremum

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I =]a;b[$ et $x_0 \in I$.
Si $f'(x_0) = 0$ et si f' **change de signe** en x_0, alors f admet un extremum local en x_0.

Minimum local en x_0

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	$f(x_0)$	↗	

Maximum local en x_0

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	$f(x_0)$	↘	

Exemple. Soit $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$. Alors $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$, trinôme de discriminant $\Delta = 64$ et de racines $x_1 = -\dfrac{2}{3}$ et $x_2 = 2$. $f'(x)$ est du signe de $a = 3$ à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	$\frac{67}{27}$	↘	-7	↗	

f admet un maximum local en $-\dfrac{2}{3}$ (égal à $\dfrac{67}{27}$) et un minimum local en 2 (égal à -7).

Remarque. La condition de changement de signe est indispensable. La fonction cube $x \mapsto x^3$ a pour dérivée $x \mapsto 3x^2$: elle s'annule en 0 mais reste positive, donc la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et **n'admet pas d'extremum local en** 0.

3. Exercices d'application

Exercice 1 ★ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 11x + 12$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f'.
2. Étudier, pour tout réel x, le signe de $f'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 ★★ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par $h(x) = 7 - \dfrac{10}{5 - x}$.

1. Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ et déterminer sa fonction dérivée h'.
2. Étudier, pour tout réel $x \neq 5$, le signe de $h'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction h sur $]-\infty ; 5[$ et sur $]5 ; +\infty[$.

Exercice 3 ★★ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 56x - 24$.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée g'.
2. Étudier, pour tout réel x, le signe de $g'(x)$.
3. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$ et ses extremums locaux.

Exercice 4 ★★ Déterminer deux nombres réels non nuls dont la différence est égale à 100 et dont le produit est minimal.

Exercice 5 ★★★ Un bassin rectangulaire de 80 m^2 est adossé à un rocher qui en forme un côté ; les trois autres côtés sont bordés de marbre. On note x la longueur (en m) des deux côtés perpendiculaires au rocher et $b(x)$ la longueur totale de la bordure.

1. Montrer que pour tout $x \in I =]0 ; 20]$, $b(x) = 2x + \dfrac{80}{x}$.
2. Justifier que b est dérivable sur I et déterminer $b'(x)$.
3. Étudier le signe de $b'(x)$ sur I et en déduire les variations de b.
4. Pour quelle valeur exacte de x la longueur de la bordure est-elle minimale ? Que vaut alors $b'(x)$?

Exercice 6 ★★★ Avec une feuille de carton de 20 cm sur 30 cm, on construit une boîte sans couvercle en forme de pavé droit : on découpe aux quatre coins quatre carrés de côté x (en cm), puis on replie les bords. Quelle valeur faut-il donner à x pour que le volume de la boîte soit maximal ?

Fin du cours — Bon travail !