Évaluation — Suites, limites et continuité

Classe de **Terminale** • Spécialité Mathématiques • Durée : **1 heure**

Pr. Elakili **Suites · Limites · Continuité** **Barème sur 20 points**

Toutes les réponses doivent être justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1 — 3 points

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $\quad 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

Exercice 2 — 6 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+1$.

1. Calculer u_1 et u_2. *(0,5 pt)*

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$. *(2 pts)*

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. *(0,5 pt)*

4. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-3$.

a) Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme. *(1 pt)*

b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n. En déduire la limite de (u_n). *(1 pt)*

5. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 2{,}99$. *(1 pt)*

Exercice 3 — 5 points

Déterminer les limites suivantes, et donner une interprétation graphique pour a) et b) :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+2}{2x^2+5}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to-2^-}\frac{x-1}{x+2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to-2^+}\frac{x-1}{x+2}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^x-x^2\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2x+1)\,\mathrm{e}^x$ e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$ f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\sin x}{x^2}$

(a) 0,75 b) 1 c) 0,75 d) 0,75 e) 1 f) 0,75)

Exercice 4 — 6 points

Partie A. Soit a un réel et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=a\,\mathrm{e}^x+1$ si $x<0$ et $g(x)=x^2+3$ si $x\geqslant 0$.

Déterminer a pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$. *(1,5 pt)*

Partie B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x-5$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. *(1 pt)*

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. *(1 pt)*

3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis que $1<\alpha<2$. *(1,5 pt)*

4. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}. *(0,5 pt)*

5. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x. *(0,5 pt)*

Bon courage !