Fiche d'exercices n°5 — Dérivation et convexité

Pr. Elakili | Terminale Spécialité Mathématiques | Site web : missionmaths360.com | Octobre 2026

Difficulté : ★★ bon niveau ★★★ exigeant ★★★★ très exigeant Exercices 10 à 12 : extraits de sujets de bac.

Exercice 1 ★★

On considère $u : x \mapsto 1 - x^2$, $v : x \mapsto \sqrt{x}$ et $w : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $v \circ u$ et de $u \circ v$, puis leurs expressions. Sont-elles égales ?
2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Écrire f comme composée de u, v, w et préciser son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
3. Sans calculer de dérivée, déterminer le sens de variation de f sur $[0;1[$.

Exercice 2 ★★

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

a) $f(x) = (3x^2-1)^4$ sur $\mathbb{R}$; **b)** $g(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{2x}+1}$ sur $\mathbb{R}$;

c) $h(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$ sur $]0;+\infty[$; **d)** $k(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 ★★

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2-4x+5}$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations complet de f (limites comprises). Préciser le minimum de f.

Exercice 4 ★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2-3)\,\mathrm{e}^x$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Étudier la convexité de f et déterminer les abscisses des points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
3. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 sur l'intervalle $\left[-2-\sqrt{5}\,;-2+\sqrt{5}\,\right]$.

Exercice 5 ★★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x$.

1. Étudier la convexité de f et déterminer les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
3. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) - (-4x+3) = (x-1)^3(x+3)$. En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T. Ce résultat est-il cohérent avec la question 1 ?

Exercice 6 ★★★

1. En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, démontrer que pour tout réel x : $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.
2. En déduire que pour tout réel $x < 1$: $\mathrm{e}^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.
3. Démontrer que pour tous réels a et b : $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$.

Exercice 7 ★★★

On cherche les réels a, b, c tels que la fonction $f : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$ admette pour courbe $\mathcal{C}_f$ une courbe ayant un point d'inflexion en $I(1\,;2)$, la tangente en I ayant pour coefficient directeur -3.

1. Traduire ces conditions par un système et déterminer a, b et c.
2. Vérifier que, pour tout réel x, $f(2-x) + f(x) = 4$. Interpréter graphiquement.

Exercice 8 ★★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Montrer que $f''(x) = 2(2x^2-1)\mathrm{e}^{-x^2}$, puis étudier la convexité de f.
2. Déterminer les coordonnées des deux points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
3. Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}_f$ en ces deux points se coupent en un point de l'axe des ordonnées dont on donnera les coordonnées.

Exercice 9 ★★★★

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{1/x}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et, en posant $X = \frac{1}{x}$, sa limite en 0.
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}\,\mathrm{e}^{1/x}$ et dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que $f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^3}$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$ et sa tangente au point d'abscisse 1 ?
4. À l'aide de l'exercice 6, montrer que pour tout $x > 0$: $f(x) \geqslant x + 1$.
5. En reconnaissant un taux d'accroissement, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\mathrm{e}^{1/x} - 1\right) = 1$. En déduire que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, et préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette asymptote.

Exercice 10 ★★★ *Bac Asie, 10 juin 2024 (Jour 1), Exercice 1 – Partie B, q. 1*

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = (4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}$, deux fois dérivable sur cet intervalle.

a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$: $f'(x) = (-4x+6)\,\mathrm{e}^{-x+1}$.

b) En déduire le tableau complet des variations de f sur $[0;+\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c) On admet que $f''(x) = (4x-10)\,\mathrm{e}^{-x+1}$. Étudier la convexité de f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 11 ★★★ *Bac Centres étrangers (groupe 2), session 2023, Sujet 2, Exercice 1 – Parties B et C*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}$ et $A\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$ le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{3\mathrm{e}^{-3x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2}$ et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A.
4. On admet que $f''(x) = \dfrac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}$. Étudier le signe de f'', préciser les intervalles où f est convexe, concave, et la nature du point A.
5. En déduire la position relative de T et de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 12 ★★★★ *Bac Nouvelle-Calédonie, session 2023, Sujet 2, Exercice 2*

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$; étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0{,}367$ sur $[0;+\infty[$.
4. On admet que $f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$. Étudier la convexité de f.
5. Soit $a \geqslant 0$, A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a et T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A.
   a) Montrer qu'une équation de T_a est $y = (1-a)\mathrm{e}^{-a}x + a^2\mathrm{e}^{-a}$.
   b) On note H_a le point d'intersection de T_a avec l'axe des ordonnées et $g(a)$ son ordonnée. Exprimer $g(a)$.
   c) Montrer que $g(a)$ est maximale lorsque A est le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Fin de la fiche — Bon travail !