Fiche d'exercices n°5 — Variations et courbes représentatives

Pr. Elakili | Première Spécialité Mathématiques | Site web : missionmaths360.com | Octobre 2026

Difficulté : ★★ bon niveau ★★★ exigeant Exercices 10 à 12 : extraits de sujets officiels (E3C et épreuve anticipée de Première).

Exercice 1 ★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$.

2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ et préciser ses extremums locaux.

3. Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est horizontale.

Exercice 2 ★★

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

1. Montrer que pour tout $x > 1$: $f'(x) = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$.

2. Étudier les variations de f sur $]1;+\infty[$. En déduire que pour tout $x > 1$: $x^2 + 3 \geqslant 6(x-1)$.

Exercice 3 ★★

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$.

2. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$ et préciser son minimum.

Exercice 4 ★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + ax^2 + b$, où a et b sont deux réels.

1. Déterminer a et b pour que f admette en 2 un extremum local égal à -3.

2. Avec ces valeurs, vérifier que f' change de signe en 2 et préciser la nature de cet extremum.

Exercice 5 ★★

1. Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - 3x + 2$.

2. En déduire que pour tout réel $x \geqslant 0$: $x^3 + 2 \geqslant 3x$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 6 ★★★

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2 + x - 1$, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. On pose $d(x) = f(x) - g(x)$.

1. Étudier les variations de d sur $\mathbb{R}$ et calculer $d(-1)$ et $d(1)$.

2. En déduire le signe de $d(x)$ selon les valeurs de x, puis la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 7 ★★★

Dans un repère orthonormé, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 9 - x^2$. Pour $x \in [0;3]$, on note $M(x\,;0)$, $N(-x\,;0)$ et P, Q les points de $\mathcal{P}$ d'abscisses respectives x et $-x$.

1. Montrer que l'aire du rectangle $MPQN$ est $A(x) = 18x - 2x^3$.

2. Déterminer la valeur de x pour laquelle cette aire est maximale, ainsi que l'aire maximale.

Exercice 8 ★★★

Une entreprise fabrique x centaines d'objets par jour, avec $x \in [0;10]$. Le coût total de production, en centaines d'euros, est $C(x) = x^3 - 12x^2 + 60x$, et chaque centaine d'objets est vendue 36 centaines d'euros.

1. Le coût moyen est $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ pour $x \in]0;10]$. Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ?

2. Montrer que le bénéfice est $B(x) = -x^3 + 12x^2 - 24x$, étudier ses variations et déterminer la production qui rend le bénéfice maximal. Donner la valeur exacte de ce bénéfice maximal.

Exercice 9 ★★★

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$, et $a>0$. On note T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

1. Montrer que T_a a pour équation $y=-\dfrac{1}{a^2}x+\dfrac{2}{a}$, puis qu'elle coupe les axes en $A(2a\,;0)$ et $B\left(0\,;\frac{2}{a}\right)$.

2. Montrer que l'aire du triangle OAB ne dépend pas de a.

3. Exprimer AB^2 en fonction de a, puis déterminer la valeur de a pour laquelle la longueur AB est minimale.

Exercice 10 ★★ *E3C, Banque nationale de sujets (épreuve 2), Sujet n°13, Exercice 4*

1. Étudier le signe du polynôme $P(x)=x^2+4x+3$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit f définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$.

Montrer que pour tout $x>-2$: $f'(x)=\dfrac{P(x)}{(x+2)^2}$.

3. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f sur $]-2;+\infty[$.

4. En déduire que f admet un minimum sur $]-2;+\infty[$; préciser sa valeur et en quel réel il est atteint.

5. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Exercice 11 ★★★ *E3C, Banque nationale de sujets, Sujet G1SSMAT02606, Exercice 2*

Un industriel découpe dans une plaque de métal rectangulaire de 18 cm de large et 24 cm de long quatre carrés de côté x cm aux quatre coins, puis replie verticalement les bords pour obtenir une boîte sans couvercle. Son volume est donné par une fonction $\mathcal{V}$ définie sur $[0;9]$.

1. Montrer que pour tout réel x de $[0;9]$: $\mathcal{V}(x)=4x^3-84x^2+432x$.

2. On note $\mathcal{V}'$ la dérivée de $\mathcal{V}$ sur $[0;9]$. Donner l'expression de $\mathcal{V}'(x)$.

3. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de $\mathcal{V}$.

4. Pour quelle(s) valeur(s) de x la contenance de la boîte est-elle maximale ?

5. L'industriel peut-il construire une telle boîte de contenance supérieure ou égale à 650 cm^3 ? Justifier.

Exercice 12 ★★★ *Épreuve anticipée de mathématiques 2026, Centres étrangers, Exercice 3*

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, de courbe $\mathcal{C}_f$. La droite T_A est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(1\,;20)$ et passe par le point $B(3\,;10)$.

1. a) Donner $f(1)$. **b)** Déterminer la valeur de $f'(1)$.

c) Justifier que l'équation réduite de la tangente T_A à $\mathcal{C}_f$ au point A est $y=-5x+25$.

Pour la suite, f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4x^2+7x+9}{x}$.

2. a) Démontrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{(2x-3)(2x+3)}{x^2}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$, puis en déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

3. Existe-t-il une tangente à $\mathcal{C}_f$ parallèle à la droite d'équation $y=3x+5$? Justifier.

Fin de la fiche — Bon travail !