Fiche d'entraînement au DS

Fiche d'exercices • Préparation au DS du **lundi 16 novembre 2026** • Classe de **Première**

Spécialité Mathématiques — Second degré · Dérivation · Variations et extremums

Pr. Elakili **12 exercices, difficulté croissante** **Site web : missionmaths360.com**

Difficulté : ★☆☆ application directe • ★★☆ classique • ★★★ niveau DS + — Ex. 11 et 12 : **optimisation**

Exercice 1 • Trinômes : forme canonique, racines, signe ★☆☆

Pour chacun des trinômes suivants, déterminer la forme canonique, les racines et la forme factorisée, puis dresser le tableau de signe : a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$ b) $g(x) = -2x^2 + 3x + 2$.

Exercice 2 • Équations et inéquations ★☆☆

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$ b) $-x^2 + 6x - 9 \geqslant 0$ c) $(2x-1)(x+3) > x^2 - 1$ d) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Exercice 3 • Calculs de dérivées ★☆☆

Préciser l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée de chacune des fonctions :

a) $(x^2+1)(3x-2)$ b) $\dfrac{x-1}{x^2+1}$ c) $\sqrt{2x+6}$ d) $(5-3x)^4$ e) $x - \dfrac{4}{x}$.

Exercice 4 • Parabole, tangentes et droite ★★☆

Soit $f(x) = x^2 - 2x + 3$ sur $\mathbb{R}$, de parabole $\mathcal{P}$, et la droite D d'équation $y = 2x - 1$.

1. Étudier la position relative de $\mathcal{P}$ et de D. Montrer que D est la tangente à $\mathcal{P}$ en un point A dont on précisera les coordonnées.

2. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse 0, puis les coordonnées du point d'intersection de T et de D.

Exercice 5 • Équation à paramètre ★★☆

Pour tout réel m, on considère l'équation (E_m) : $\quad mx^2 + (2m+1)x + m = 0$.

1. Résoudre (E_0). Pour $m \neq 0$, montrer que le discriminant de (E_m) vaut $4m+1$.

2. Selon les valeurs de m, déterminer le nombre de solutions de (E_m).

3. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (E_m) admet deux solutions distinctes **toutes deux strictement négatives** (on utilisera la somme et le produit des racines). Vérifier avec $m = 2$.

Exercice 6 • Variations d'un polynôme de degré 3 ★★☆

Soit f définie sur $[-2\,;4]$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

1. Calculer $f'(x)$ et le factoriser. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[-2\,;4]$.

2. Préciser les extremums locaux de f, puis le maximum et le minimum de f sur $[-2\,;4]$.

3. Comparer, sans calcul, $f(0)$ et $f(1)$. Justifier que pour tout $x \in [-1\,;2]$: $\quad -15 \leqslant f(x) \leqslant 12$.

Exercice 7 • Une fonction avec racine carrée ★★☆

Soit f définie sur $[0\,;4]$ par $f(x) = x\sqrt{4-x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $[0\,;4[$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}$.

2. Dresser le tableau de variations de f et déterminer la valeur exacte de son maximum.

Exercice 8 • Extremum imposé ★★☆

Soit $f(x) = x^3 + px + q$ sur $\mathbb{R}$, où p et q sont réels.

1. Montrer que si $p \geqslant 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet donc aucun extremum local.

2. Déterminer p et q pour que f admette un maximum local en -1, égal à 4.

3. Avec ces valeurs, dresser le tableau de variations de f et préciser son minimum local. Vérifier que $f(x) = (x-1)^2(x+2)$.

Exercice 9 • Démontrer une inégalité ★★☆

1. Soit $g(x) = x^3 - 12x + 16$ sur $[0\,;+\infty[$. Étudier les variations de g et en déduire que pour tout $x \geqslant 0$: $x^3 + 16 \geqslant 12x$.

2. Retrouver ce résultat en vérifiant que $g(x) = (x-2)^2(x+4)$. L'inégalité reste-t-elle vraie pour $x \in [-4\,;0]$?

Exercice 10 • Encadrer une fonction rationnelle ★★★

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 2}{x^2 + 1}$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et montrer que $f'(x) = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$.

2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ et préciser ses extremums locaux.

3. Montrer que pour tout réel x : $f(x) - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}$ et $f(x) - \dfrac{3}{2} = \dfrac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}$.
En déduire que pour tout réel x : $\frac{3}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{5}{2}$. Les extremums locaux sont-ils des extremums sur $\mathbb{R}$?

Exercice 11 • Optimisation : maximiser un bénéfice ★★★

Une entreprise fabrique chaque jour q centaines d'objets, avec $q \in [0\,;10]$. Le coût total de fabrication, en milliers d'euros, est $C(q) = q^3 - 12q^2 + 51q + 10$. Chaque centaine d'objets est vendue 30 milliers d'euros.

1. Montrer que C est croissante sur $[0\,;10]$. Interpréter.

2. Montrer que le bénéfice est $B(q) = -q^3 + 12q^2 - 21q - 10$, puis que $B'(q) = -3(q-1)(q-7)$.

3. Dresser le tableau de variations de B sur $[0\,;10]$. Combien d'objets faut-il fabriquer pour que le bénéfice soit maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?

Exercice 12 • Optimisation : la boîte la plus économique ★★★

On veut fabriquer une boîte sans couvercle, de base carrée de côté x dm ($x > 0$) et de hauteur h dm, dont le volume vaut 32 dm^3.

1. Exprimer h en fonction de x, puis montrer que l'aire totale de carton utilisée est $S(x) = x^2 + \dfrac{128}{x}$.

2. Montrer que $S'(x) = \dfrac{2(x^3 - 64)}{x^2}$, puis que $x^3 - 64 = (x-4)(x^2 + 4x + 16)$. Étudier le signe de $x^2 + 4x + 16$.

3. Dresser le tableau de variations de S sur $]0\,;+\infty[$. En déduire les dimensions de la boîte qui utilise le moins de carton, et l'aire minimale correspondante.

Corrigé détaillé en ligne (gratuit) :
https://missionmaths360.com/fiche-entrainement-ds-premiere-second-degre-derivation-variations-corrige/