Mathématiques

Classe de Terminale — Fiche d'entraînement au devoir surveillé

Suites et récurrence · Limites · Continuité et TVI · Dérivation et convexité

Pr. Elakili **Durée conseillée :** 2 heures **DS du lundi 16 novembre 2026**

Calculatrice autorisée *Barème : 4 × 5 points* *Corrigé fourni séparément*

Les quatre exercices sont adaptés de sujets officiels du baccalauréat (source indiquée sous chaque titre). Les questions marquées ⋆ sont des compléments ajoutés pour l'entraînement.

Exercice 1 — Limites, convexité et TVI (5 points)

D'après Bac spécialité, Centres étrangers, sujet 2, 6 juin 2024, Exercice 2.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. **a. (0,5 pt)** Déterminer la limite de f en 1.
   b. (0,25 pt) Interpréter graphiquement ce résultat.
2. **(0,5 pt)** Déterminer la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
3. **a. (0,5 pt)** Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et que, pour tout $x<1$: $f'(x) = \dfrac{(x-2)\,\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}$.
   b. (0,5 pt) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variations complet.
4. On admet que f est deux fois dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et que, pour tout $x<1$:

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x\,(x^2-4x+5)}{(x-1)^3}.$$

   a. (0,75 pt) Étudier la convexité de f sur $]-\infty\,;1[$.
   b. (0,5 pt) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   c. (0,5 pt) En déduire que, pour tout réel $x<1$: $\mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1)$.
5. **a. (0,5 pt)** Démontrer que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $]-\infty\,;1[$.
   b. (0,5 pt) Justifier que $\alpha \in]0\,;1[$, puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 2 — Suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ (5 points)

D'après Bac spécialité, Polynésie, sujet 1, 19 juin 2024, Exercice 4.

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;5[$ par $f(x) = \dfrac{4}{5-x}$, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. L'objectif est de conjecturer en partie A, puis de démontrer en partie B, le comportement de (u_n).

Partie A — Conjectures

1. **(0,5 pt)** Recopier et compléter la fonction Python `suite(n)`, qui prend en paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = ...
    for i in range(n):
        ...
    return u
```

2. **(0,25 pt)** L'appel `suite(2)` renvoie `1.3333333333333333`. Justifier cet affichage par un calcul.
3. **(0,25 pt)** On obtient : `suite(5)` $\approx 1{,}005\,848$; `suite(10)` $\approx 1{,}000\,006$; `suite(20)` $\approx 1{,}000\,000$. Émettre une conjecture sur le sens de variation et sur la convergence de (u_n).

Partie B — Démonstrations

1. **(0,5 pt)** Montrer que f est croissante sur $]-\infty\,;5[$.
2. **(1 pt)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.
3. a. **(0,5 pt)** Montrer que, pour tout $x < 5$: $f(x) = x \iff x^2 - 5x + 4 = 0$.
   b. **(0,5 pt)** Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]-\infty\,;5[$.
4. **(1 pt)** Démontrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. **(0,5 pt)** Le comportement de la suite serait-il le même en choisissant $u_0 = 4$? Justifier.

Exercice 3 — Une population d'oiseaux (5 points)

D'après Bac spécialité, Polynésie, sujet 2, 5 mai 2022, Exercice 3.

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie par $u_0 = 40$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}008\, u_n\,(200 - u_n),$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $2021 + n$. On note f la fonction définie sur $[0\,;100]$ par $f(x) = 0{,}008\,x\,(200 - x)$, de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **(0,25 pt)** Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux au début de l'année 2022.
2. **(0,5 pt)** Résoudre dans l'intervalle $[0\,;100]$ l'équation $f(x) = x$.
3. a. **(0,75 pt)** Démontrer que f est croissante sur $[0\,;100]$ et dresser son tableau de variations.
   b. **(1 pt)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$.
   c. **(0,5 pt)** En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   d. **(1 pt)** Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la fonction Python ci-dessous.

```
def seuil(p):
    n = 0
    u = 40
    while u < p:
        n = n + 1
        u = 0.008 * u * (200 - u)
    return n
```

   a. **(0,5 pt)** On saisit `seuil(100)` : le programme ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi, à l'aide de la question 3.
   b. * **(0,5 pt)** Pour quelles valeurs de `p` le programme s'arrête-t-il ? Modifier la fonction pour qu'elle renvoie `-1` lorsque la valeur de `p` ne permet pas d'arrêt, puis donner, en l'interprétant, la valeur renvoyée par `seuil(74)`.

Exercice 4 — Deux suites, une même limite (5 points)

D'après Bac spécialité, Métropole – Amérique du Nord (septembre), sujet 1, 9 septembre 2025, Exercice 3.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la convergence de deux suites vers une même limite.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[2\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x-2}$, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **(0,5 pt)** Justifier le tableau de variations ci-dessous.

x	2	$+\infty$
$f(x)$	2 ↗	$+\infty$

2. **(0,75 pt)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$. En déduire que (u_n) converge.
3. **(0,5 pt)** Déterminer la limite de (u_n).
4. On considère la fonction Python suivante.

```
from math import sqrt
def rang(a):
    n = 0
    u = 6
    while u >= a:
        n = n + 1
        u = sqrt(3*u - 2)
    return n
```

   a. **(0,25 pt)** Justifier que `rang(2.000001)` renvoie une valeur.
   b. **(0,5 pt)** Déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles `rang(a)` renvoie une valeur.
   c. * **(0,25 pt)** Corriger la fonction pour qu'elle ne puisse jamais tourner indéfiniment (on renverra `None` dans les cas problématiques).

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{v_n}$. On admet que, pour tout n, $v_n > 2$.

1. **(0,25 pt)** Calculer v_1.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = \dfrac{v_n - 1}{v_n - 2}$.
   a. **(0,5 pt)** Démontrer que (w_n) est géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.
   b. **(0,5 pt)** Exprimer w_n en fonction de n, puis montrer que $v_n = \dfrac{2w_n - 1}{w_n - 1}$.
   c. **(0,25 pt)** En déduire la limite de (v_n).
   d. **(0,5 pt)** Déterminer le plus petit entier n tel que $v_n < 2{,}01$.

Partie C

1. **(0,25 pt)** On admet que (v_n) est décroissante. Déterminer le plus petit entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, les termes u_n et v_n appartiennent tous deux à l'intervalle $]1{,}99\,;2{,}01[$.

Corrigé détaillé en ligne (gratuit) :
https://missionmaths360.com/fiche-entrainement-ds-terminale-suites-limites-convexite-corrige/

Fin de la fiche — Bon travail !