Terminale — Spécialité mathématiques **Pr. Elakili**

Fiche d'exercices : fonctions cosinus et sinus

Suites, récurrence, limites, dérivation, convexité Site web : missionmaths360.com

Difficulté : ★ application directe ★★ entraînement ★★★ approfondissement ★★★★ défi

Exercice 1 ★

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = x\cos(x)$ **b)** $g(x) = \cos^2(x)$ **c)** $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$

d) $k(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$ **e)** $m(x) = \sin(5x - \pi)$

Exercice 2 ★

a) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $2\sin(x) + \sqrt{3} = 0$.
b) Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $\cos(2x) = \cos(x)$.
c) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $2\cos(x) - \sqrt{2} > 0$.

Exercice 3 ★★

Déterminer les limites suivantes (pour c) et d), on reconnaîtra un nombre dérivé).

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(x + \cos(x)\big)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3 + 2\sin(x)}{x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$ **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 4 ★★

a) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 \leqslant 0$ (on pourra poser $X = \cos(x)$).
b) Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$.

Exercice 5 ★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2(x) - \cos(x)$.

1. Montrer que f est 2π-périodique et paire. Justifier qu'il suffit de l'étudier sur $[0\,;\pi]$.

2. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \sin(x)\big(1 - 2\cos(x)\big)$.

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\pi]$. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) \geqslant -\dfrac{1}{4}$.

Exercice 6 ★★

Soit g la fonction définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \cos(x) - x$.

1. Étudier les variations de g sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

2. Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution α dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 7 ★★★

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x - \sin(x)$ sur $[0\,;+\infty[$. En déduire que, pour tout $x \geqslant 0$, $\sin(x) \leqslant x$.

2. À l'aide de la fonction $g : x \mapsto \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$, montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

3. En procédant de même, montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

Exercice 8 ★★★

Soit f la fonction définie sur $[0\,;2\pi]$ par $f(x) = x + \sin(x)$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;2\pi]$.

2. Étudier la convexité de f et montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A, dont on donnera les coordonnées et l'équation de la tangente en A.

3. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. En utilisant la convexité, retrouver que $\sin(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0\,;\pi]$.

Exercice 9 ★★★

On note $f = \sin$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième (avec $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = (f')'$, …).

1. Calculer $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$ pour tout réel x.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x :

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin(x) \qquad \text{et} \qquad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos(x).$$

3. En déduire une expression simple de $f^{(2026)}(x)$, puis la valeur de $f^{(2027)}(0)$.

Exercice 10 ★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. On admet que $\sin(x) < x$ pour tout $x > 0$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$. *(On rappelle que $1 < \frac{\pi}{2}$.)*

2. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante. En déduire qu'elle converge vers un réel $\ell \in [0\,;1]$.

3. Justifier que $\sin(\ell) = \ell$, puis déterminer ℓ.

Exercice 11 ★★★★

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\pi]$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

2. Soit φ la fonction définie sur $[0\,;\pi]$ par $\varphi(x) = x\cos(x) - \sin(x)$. Étudier les variations de φ, puis en déduire que $\varphi(x) < 0$ pour tout $x \in]0\,;\pi]$.

3. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $]0\,;\pi]$.

4. En déduire l'**inégalité de Jordan** : pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

Exercice 12 ★★★★

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$.

1. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(\cos(x) - \sin(x)\big)$.

3. À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $\cos(x) = \sin(x)$, puis justifier que ses solutions dans $[0\,;+\infty[$ sont les réels $x_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Justifier, à l'aide du cercle trigonométrique, que $\sin(x_n) = (-1)^n \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. On pose $y_n = f(x_n)$. Montrer que (y_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme, puis déterminer sa limite.

Fin de la fiche — Bon travail !