Variations et extremums

Fiche d'exercices • Fiche N°5 • Classe de **Première**

Spécialité Mathématiques — Application de la dérivation

Pr. Elakili **12 exercices, difficulté croissante** **Site web : missionmaths360.com**

Difficulté : ★☆☆ application directe • ★★☆ classique • ★★★ exigeant — Ex. 10 à 12 : **optimisation**

Exercice 1 • Fonctions du second degré ★☆☆

Pour a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ et b) $g(x) = -x^2 + 5x - 4$ sur $\mathbb{R}$: calculer la dérivée, étudier son signe, dresser le tableau de variations et préciser l'extremum. Retrouver ce résultat à l'aide de la forme canonique.

Exercice 2 • Fonctions polynômes de degré 3 ★☆☆

1. Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ sur $\mathbb{R}$. Factoriser $f'(x)$, dresser le tableau de variations de f et donner ses extremums locaux.

2. Soit $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 1$ sur $[-2\,;3]$. Dresser le tableau de variations de g, puis déterminer le maximum et le minimum de g sur $[-2\,;3]$.

Exercice 3 • Exploiter le signe de la dérivée ★☆☆

Une fonction f est dérivable sur $[-4\,;5]$. On donne le signe de $f'(x)$ ci-contre, ainsi que : $f(-4) = 2$, $f(-1) = 5$, $f(2) = -3$ et $f(5) = 1$.

x	-4		-1		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1. Dresser le tableau de variations de f et préciser ses extremums locaux.

2. Comparer, en justifiant, $f(0)$ et $f(1)$, puis $f(3)$ et $f(4)$. Peut-on comparer $f(-3)$ et $f(3)$?

3. Quel est le maximum de f sur $[-4\,;5]$? Combien de fois f prend-elle la valeur -3 ?

Exercice 4 • Fonctions rationnelles ★★☆

1. Soit $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Étudier le sens de variation de f sur $]-\infty\,;-3[$ et sur $]-3\,;+\infty[$.

2. Soit $g(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Dresser le tableau de variations de g et préciser ses extremums locaux. Que remarque-t-on en comparant le maximum local et le minimum local ? Est-ce contradictoire ?

Exercice 5 • Quotient et extremums locaux ★★☆

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

1. Montrer que, pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$.

2. Dresser le tableau de variations de f et préciser ses extremums locaux.

3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3. Interpréter graphiquement.

Exercice 6 • Une fonction avec racine carrée ★★☆

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et montrer que $f'(x) = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$.

2. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$. En déduire que, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant -2$.

Exercice 7 • Retrouver une fonction à partir d'un extremum ★★☆

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + ax^2 + b$, où a et b sont deux réels.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a.

2. Déterminer a et b pour que f admette un extremum local en 2, égal à -3.

3. Avec ces valeurs, dresser le tableau de variations de f : l'extremum en 2 est-il un maximum ou un minimum ? Préciser l'autre extremum local.

Exercice 8 • Démontrer une inégalité par une étude de fonction ★★☆

1. On pose $g(x) = x^3 - 3x + 2$ sur $[0\,;+\infty[$. Étudier les variations de g et en déduire que, pour tout $x \geqslant 0$, $x^3 \geqslant 3x - 2$.

2. Montrer que, pour tout réel $x > 0$: $x^2 + \dfrac{16}{x} \geqslant 12$. Pour quelle valeur de x y a-t-il égalité ?

Exercice 9 • Dérivée nulle et extremum : attention ! ★★☆

1. Soit $f(x) = x^4 - 2x^2$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$, dresser le tableau de variations de f et donner tous ses extremums locaux. Lesquels sont des extremums sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

2. Soit $g(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(0)$. La fonction g admet-elle un extremum local en 0 ? Conclure : la condition « $f'(a) = 0$ » suffit-elle pour qu'il y ait un extremum en a ?

Exercice 10 • Optimisation : la boîte de volume maximal ★★★

Dans une feuille carrée de carton de 30 cm de côté, on découpe aux quatre coins un carré de côté x (en cm), puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.

1. Justifier que $x \in]0\,;15[$ et que le volume de la boîte, en cm^3, est $V(x) = x(30-2x)^2$.

2. Montrer que $V'(x) = 12(x-5)(x-15)$, dresser le tableau de variations de V sur $]0\,;15[$.

3. En déduire les dimensions de la boîte de volume maximal, et ce volume maximal.

Exercice 11 • Optimisation : rectangle sous une parabole ★★★

Dans un repère orthonormé, on note $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = 9 - x^2$. Pour $x \in]0\,;3[$, on considère le rectangle $ABCD$ de sommets $A(-x\,;0)$, $B(x\,;0)$, $C(x\,;9-x^2)$ et $D(-x\,;9-x^2)$.

1. Faire une figure, puis montrer que l'aire du rectangle est $\mathcal{A}(x) = 18x - 2x^3$.

2. Étudier les variations de $\mathcal{A}$ sur $]0\,;3[$. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire est maximale, et la valeur exacte de cette aire maximale.

Exercice 12 • Optimisation : distance minimale à une courbe ★★★

Soit $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction racine carrée dans un repère orthonormé, et $A(3\,;0)$. Pour $x \geqslant 0$, on note $M(x\,;\sqrt{x})$ le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x.

1. Montrer que $AM^2 = x^2 - 5x + 9$.

2. On pose $d(x) = x^2 - 5x + 9$. Étudier les variations de d sur $[0\,;+\infty[$.

3. En déduire le point M_0 de $\mathcal{C}$ le plus proche de A, ainsi que la distance minimale AM_0 (valeur exacte).
Indication : pour des longueurs positives, AM est minimale lorsque AM^2 l'est.

Corrigé détaillé en ligne (gratuit) :
https://missionmaths360.com/variations-extremums-exercices-corriges-premiere/